Världens största tal

Fredrik Engström

Du har ju själv sagt: Jag skall låta det gå dig väl och göra dina ättlingar oräkneliga, de skall bli som sanden vid havet. (1 Mos 32:12)

Tävling

- Två tävlande får en halv minut på sig att på var sitt papper skriva ner ett så stort (naturligt) tal som möjligt.
- Man får använda sig av svenska och matematisk notation som finns i den "matematiska litteraturen."
- En matematiker, givet *ett* av papprena måste kunna förstå (i princip) vilket tal som avses.
- Den som har skrivit ner det största talet vinner tävlingen.

Strategier

- 9999999999999999999999999999999
- 11111111111111111111111111111111111111111111
- $11^{11111111111111111111111111111111111111111111}$
- $11^{11^{11^{11^{11}}}}$
- $f(a,b) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$, b stycken a. $f(11, 111111111)$
- $f(a,b) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$, b stycken a. $f(11, f(11, 11111))$
- $f(a,b) = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$, b stycken a. $f(11, f(11, f(11, 1111)))$

Vardagliga tal

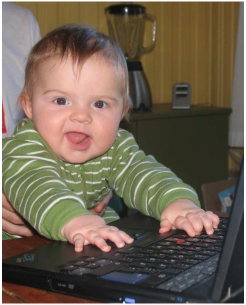
- 63 ("Minst 63 döda i rysk brand")
- 600.000 ("600.000 kronor blev lönelyftet för Vattenfalls vd")
- 123 miljarder ("I de över 100 svenskregistrerade fonderna med etisk profil förvaltas nu sammanlagt 123 miljarder kronor.")
- $10^{12} = 1.000.000.000.000 = 1$ Tera ("Värst på mässan är nog Hitachi med en kamera med ett inbyggt minne på en terabyte.")

Astronomiska tal

- 1 AU $\approx 10^{11}$ meter (avstånd mellan jorden och solen)
- 10^{6} AU $\approx 10^{17}$ meter (avstånd mellan solen och närmsta stjärnan)
- 10^{17} sekunder (ålder på universum)
- 10^{26} meter (diameter på universum)
- 10^{79} (antal atomer i universum)
- 1 googol $= 10^{100}$

Tal i matematiken

- $100^{200 \cdot 40 \cdot 70} = 10^{5.600.000}$ (Antal möjliga böcker på 200 sidor.)

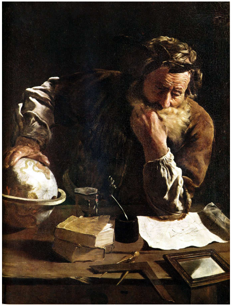


- Skewes tal $s = e^{e^{e^{79}}} \approx 10^{10^{10^{34}}}$ är sådant att

$$\pi(s) \geq \int_2^s \frac{dt}{\ln t},$$

där $\pi(x)$ är antalet primtal mindre än x.

Arkimedes och sandräknaren



- Antalet sandkorn det skulle behövas för att fylla universum.
- Myriad $= 10.000$ (största talet i bibeln)
- En myriad myriader $= 10^8$
- Första ordningen: upp till 10^8, 10^8 andra ordningens enhet.
- Andra ordningen: multiplar av andra ordningens enhet, upp till

Knuths pilnotation

- $a \cdot b = a + a + \ldots + a$
- $a^b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a \uparrow b$
- $a \uparrow\uparrow b = a \uparrow a \uparrow \ldots \uparrow a$ (b stycken a)
- $8 \uparrow\uparrow 4 = 8 \uparrow 8 \uparrow 8 \uparrow 8 = 8^{8^{8^{8}}}$
- $a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow a$. ($b$ stycken a)
- $8 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 8 \uparrow\uparrow 8 \uparrow\uparrow 8 \uparrow\uparrow 8$
- $a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow\uparrow a$. ($b$ stycken a)
- Skewes tal $\approx 10^{10^{10^{34}}} \approx 10 \uparrow\uparrow 4 = 10^{10^{10^{10}}}$

Conways pilkedjor

- $a \to b = a^b$
- $a \to b \to c = a \uparrow \ldots \uparrow b$ (c stycken $\uparrow$)
- Generellt har vi att, om X är en pilkedja och a och b tal så är
  - $X \to 1 = X$
  - $X \to a \to (b+1) =$
    $X \to (X \to (\ldots (X \to (X) \to b) \ldots) \to b) \to b$
    (a stycken X)
- Skewes tal $\approx 10^{10^{10^{34}}} \approx 10 \to 4 \to 2 = 10 \uparrow\uparrow 4$.
- Grahams tal $\approx 3 \to 3 \to 64 \to 2$
- $2 \to 4 \to 3 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow 65536$
- $2 \to 3 \to 2 \to 2 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 65536$

Herkules och Hydran

- En hydra är ett ändligt "träd":

Första ordningens aritmetik (FOA)

- FOA är ett formellt system i vilket våra mest grundläggande intuitioner om aritmetik (naturliga tal, addition och multiplikation) är formaliserade. Några av axiomen:
  - Det finns oändligt många naturliga tal.
  - Rekursiva definitioner för addition och multiplikation, t.ex. $x \cdot (y+1) = x \cdot y + x$.
  - Induktion: Om $\varphi(0)$ gäller, och om $\varphi(x)$ så gäller även $\varphi(x+1)$, i så fall gäller $\varphi(x)$ för alla naturliga tal x.

Bevisbart totala funktioner

- Om f är en definierad med Conways pilkedjor så följer det från FOA att 'för alla x finns y så att $f(x) = y$'. (f är bevisbart total.)
- Dock följer det inte att 'Herkules vinner alltid över Hydran', eller mer formaliserat 'För varje x finns y så att $HH(x) = y$'. (HH är *inte* bevisbart total.)
- Det finns många andra rekursiva funktioner som inte heller är bevisbart totala i FOA.
- De bevisbart totala rekursiva funktionerna "mäter" i någon mån styrkan hos teorin FOA.
- Det finns alltså följder/funktioner som helt enkelt växer för snabbt för FOA att kunna hantera.

Kardinalitet

- A och B mängder: de har samma kardinalitet om vi kan para ihop As element med Bs element bijektivt.
- Att ha samma kardinalitet = Att ha lika många element.
- $\mathbb{N}$ har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{N}$ har samma kardinalitet som $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{R}$ har större kardinalitet än $\mathbb{N}$.

Små kardinaltal

- Kardinaltalen är representanter ur ekvivalensklasserna.
- De ändliga kardinaltalen är precis de naturliga talen.
- $\aleph_0$ är första oändliga kardinaltalet (samma kardinalitet som $\mathbb{N}$).
- $\aleph_1$ är det andra oändliga kardinaltalet (samma kardinalitet som $\mathbb{R}$?).
- $\aleph_{\aleph_0}$ är det $\aleph_0$:e oändliga kardinaltalet.
- $\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}$ är det $\aleph_{\aleph_0}$:e oändliga kardinaltalet.
- "Keep 'em coming."
- Dessa kardinaltal är små eftersom existensen av dem följer från mängdteorin (ZFC).

Stora kardinaltal

- Låt $P(\kappa)$ vara en möjlig egenskap hos kardinaltalet κ.
- $Q =$ 'Det finns kardinaltal κ så att $P(\kappa)$.'
- Q är ett stort kardinaltalsaxiom om Q inte följer från ZFC men $\mathrm{ZFC} + Q$ är konsistent.
- Det finns kardinaltalsaxiom som "troligen" implicerar alla andra, dvs ett "största" kardinaltalsaxiom.
- H. Friedman: Vissa aritmetiska "matematiska" påståenden implicerar existensen av vissa stora kardinaltal.
- Alltså: Kunskap om de naturliga talen ger oss kunskap om stora kardinaltal (och tvärt om).

Storleken har betydelse.