Ickestandardanalys — ett didaktiskt knep?

Fredrik Engström

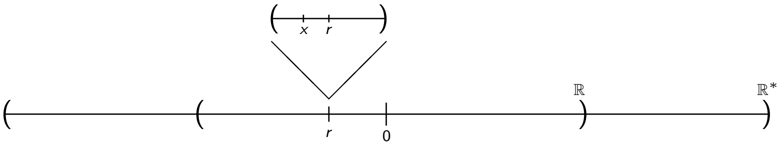
fredrik.engstrom@gmail.com
Mittuniversitetet

Matematikbiennalen 2006, Malmö

1. Introduktion
   - Vad är ickestandardanalys?
2. Historisk bakgrund
   - Newton vs Robinson
3. Matematisk teori
   - Hyperreella tal
   - Ultraprodukter
4. Pedagogiska aspekter
   - Exempel
   - Vinster
   - Problem

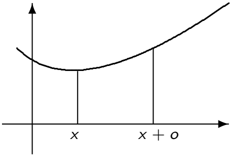
- Ickestandardanalys
- Ickestandard analys
- Icke standard analys
- Icke-standard analys
- Icke-standard-analys

- Den klassiska analysens grundläggande objekt att studera är de *reella talen*, $\mathbb{R}$.
- I ickestandardanalysen används en utvidgning av de reella talen, de *hyperreella talen* $\mathbb{R}^*$.
- Överföringsprincipen säger att de egenskaper som gäller om de reella talen också gäller för de hyperreella talen.
- De hyperreella talen innehåller bland annat:
  - *infinitesimaler*, dvs tal ϵ så att $0 < \epsilon < r$ för varje reellt tal r.
  - *oändliga* tal, dvs tal x så att $x > r$ för alla $r \in \mathbb{R}$.
- Varje ändligt hyperreellt x tal kan skrivas (unikt) som $x = r + \epsilon$ där $r \in \mathbb{R}$ och ϵ är infinitesimalt.
- Om $x = r + \epsilon$ så låter vi $\mathrm{st}(x) = r$.



Newton
(1669): Givet en kurva sådan att arean
z mellan x-axeln, y-axeln och kurvan ges av

$$z = ax^m.$$



$$\begin{aligned} z + oy &= a(x+o)^m = ax^m + amox^{m-1} + \ldots + ao^m \\ oy &= amox^{m-1} + \ldots + ao^m \\ y &= amx^{m-1} + \ldots + ao^{m-1} \\ y &= amx^{m-1} \end{aligned}$$

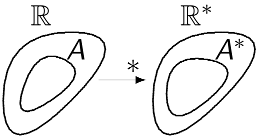
o är en *infinitesimal*, dvs $0 < o < r$ för alla reella tal $r > 0$.

- Infinitesimalerna användes till och från under 1700- och 1800-talet.
- Under 1870-talet gavs de reella talen en rigorös grund. (Méray, Cantor, Heine, Dedekind).
- Då gick det att visa att infinitesimalerna inte existerar!
- Då fick den välkända ϵ,δ-definitionen av gränsvärde ordentligt fotfäste:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{omm}$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon)$$

- Under 1960-talet hittade Abraham Robinson en rigorös grund för infinitesimalerna med hjälp av en ultraproduktskonstruktion.
- Ultraproduktskonstruktionen var starkt påverkad av Skolems konstruktion av ickestandardmodeller till aritmetik (1930-talet).
- 1976 publicerade Keisler *Elementary calculus*, en lärobok i grundläggande analys som utnyttjar Robinsons teori. Den är riktad till förstaårs studenter på högskolor och universitet.
- Ickestandardanalysen ses idag av många matematiker som en ganska esoterisk företeelse.

De hyperreella talen $\mathbb{R}^*$ måste, bland annat, uppfylla följande:



- De reella talen skall vara en äkta delmängd av de hyperreella.
- Det skall finnas en funktion $*$ som tar delmängder och funktioner på de reella talen till delmängder och funktioner på de hyperreella talen sådan att ett (första ordningens) påstående om de reella talen är sant omm motsvarandra "stjärnade" påstående om de hyperrella talen är sant.

Ex: "För varje reellt tal x finns ett reellt tal $y \in [0, 2\pi]$ så att $\sin x = \sin(x + 2\pi) = y$." är sann omm "För varje hyperreellt tal x finns ett hyperreellt tal $y \in [0, 2\pi]^*$ så att $\sin^* x = \sin^*(x +^* 2\pi) = y$." är sann.

- Låt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ vara mängden av naturliga tal.
- $$\prod \mathbb{R} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$
  är mängden av alla oändligtdimensionella vektorer av reella tal.

Exempel:

- $f(n) = 57 \in \prod \mathbb{R}$, $\langle 57, 57, 57, \ldots \rangle$
- $f(n) = n^2 \in \prod \mathbb{R}$, $\langle 0, 1, 4, 9, \ldots \rangle$
- $f(n) = \frac{1}{n+1} \in \prod \mathbb{R}$, $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle$

- Ett (ändligt additivt tvåvärt) mått på $\mathbb{N}$ är en funktion $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0, 1\}$, dvs en funktion som tar en delmängd av $\mathbb{N}$ och ger 0 eller 1.
- Man skall tänka sig ett mått som att det väljer ut de “stora” delmängderna av $\mathbb{N}$, nämligen de $A \subseteq \mathbb{N}$ sådana att $m(A) = 1$.
- Ytterligare egenskaper hos mått ger oss att:
  - $m(\mathbb{N}) = 1$
  - $m(B) = 1$ om $A \subseteq B$ och $m(A) = 1$.
  - $m(A) = 1$ omm $m(\mathbb{N} \setminus A) = 0$.
- Dessutom vill vi att m inte skall ha någon punktmassa, dvs att $m(A) = 0$ om A är ändlig.
- Existensen av ett sådant mått är långt från självklar.

- Låt $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ vara mängden av naturliga tal.
- $\prod \mathbb{R} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ är mängden av alla oändligtdimensionella vektorer av reella tal.
- Ultraprodukten med avseende på måttet m, $\prod_m \mathbb{R}$, är $\prod \mathbb{R}$ men där vi säger att två vektorer $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ är lika om

  $$m\big(\{n | f(n) = g(n)\}\big) = 1,$$

  dvs om m tycker att mängden av n för vilket $f(n) = g(n)$ är "stor".
- Vi säger ofta att ett påstående gäller *nästan överallt* om det gäller på en mängd som har mått 1 (dvs som är stor).

Avbildningen $*$ definieras nu som följer:

- $A^* = \{ f \in \mathbb{R}^* \mid m(\{ n \mid f(n) \in A \}) = 1 \}$, dvs A^* är mängden av alla hyperreella tal f sådana att nästan alla komponeter $f(n)$ ligger i A.
- $n$te komponenten i det hyperrella talet $F^*(f)$ är $F(f(n))$, Dvs $F^*(f)(n) = F(f(n))$.

Vi kommer att beteckna hyperreella tal med x och dess $n$te komponent med x_n.

Sats

Ett (första ordningens) påståendet $\varphi(f_1, \ldots, f_k)$ är sant om de hyperrella talen (i $\mathbb{R}^*$) omm

$$m\big(\{\, n \mid \varphi(f_1(n), \ldots, f_k(n)) \text{ är sant om de reella talen} \,\}\big) = 1$$

Denna sats ger oss nu överföringsprincipen:

Sats

Ett (första ordningens) påstående gäller för $\mathbb{R}$ omm motsvarande stjärnade påstående gäller för $\mathbb{R}^*$.

Låt oss ge några exempel på ickereella hyperreella tal.

- $f(n) = \frac{1}{n+1}$ är en infinitesimal, eftersom $\{ n \mid \frac{1}{n+1} < r \}$ är koändlig (dess komplement är ändligt) och $m(A) = 1$ för alla koändliga mängder.
- $g(n) = n$ är större än alla reella tal eftersom $\{ n \mid n > r \}$ är koändlig.
- $h(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$ är en infinitesimal som är mindre än f ty $\{ n \mid \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1} \} = \mathbb{N}$.

Problem

Existerar $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x-1}$*? Vad är då gränsvärdet?*

Theorem

Låt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existerar omm* $\mathrm{st}(f^*(x_0+\epsilon))$ *inte beror på infinitesimalen* ϵ*. Existerar gränsvärdet är*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \mathrm{st}(f^*(x_0+\epsilon))$$

där ϵ *är en infinitesimal.*

Räkneregler för st ger oss

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x-1} = \mathrm{st}\left(\frac{(1+\epsilon)^3+4(1+\epsilon)^2+(1+\epsilon)-6}{(1+\epsilon)-1}\right)$$
$$= \mathrm{st}\left(\frac{\epsilon^3+7\epsilon^2+12\epsilon}{\epsilon}\right) = \mathrm{st}(\epsilon^2+7\epsilon+12) = 12.$$

I klassisk analys definieras (Riemann-)integralen $\int_a^b f$ med hjälp av gränsvärde. Om

$$S_a^b(f, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-a}{k} \rfloor} f(a + kx)x$$

så har vi i ickestandardanalys:

Sats

Om f kontinuerlig på $[a, b]$ så

$$\int_a^b f = \mathrm{st}(S_a^b(f, \epsilon))$$

för alla infinitesimaler ϵ.

- Komplexa begrepp (många alternerande kvantorer) som gränsvärde och derivata blir rent algebraiska (endast allkvantor).
- Definitionerna av gränsvärde och derivata ger oss direkta verktyg för att räkna ut dem.
- Bevis och uträkningar blir ofta kortare och möjligtvis enklare.
- Min hypotes är att många elever/studenter redan tänker i termer av ickestandardanalys. De formella definitionerna i ickestandardanalys liknar mer de personliga föreställningarna av begreppen som studenter/elever redan har.

- Matematiska begrepp trivialiseras till enkla symboliska manipulationer.
- Ickestandardanalysen bygger på avancerad matematisk logik. Standardanalys bygger "endast" på ganska avancerad matematik (Dedekindsnitt, supremumaxiomet, etc)
- Det finns väldigt få läroböcker.

Frågor?