

# Sanning och konsekvens: En logikers perspektiv

---

Fredrik Engström

Göteborgs universitet

2026-04-19



GÖTEBORGS  
UNIVERSITET

## » Ordbokens definition

### Sanning

1. yttrande eller tanke som överensstämmer med verkligheten

### Konsekvens

1. (naturlig) följd av viss handling, visst förlopp eller dylikt
2. motsägelsefritt sammanhang

Källa: Svensk ordbok

## » Användning i praktiken

Vilka ord förekommer tillsammans med “sanning” i nyhetstexter?

1. *tala* sanning
2. sanning *med modifikation*
3. *berätta* sanning
4. *obekväm* sanning

⋮

Källa:



## » Introspektion och exempel

Jag står upp.

- \* **Kontingent sanning:** Beror på hur världen är beskaffad.

Om jag står upp så sitter jag inte ner.

- \* **Nödvändig sanning:** Måste vara sant. Men beror på ordens betydelser.

Antingen står jag upp eller så står jag inte upp.

- \* **Logisk sanning:** Sann på grund av sin logiska form:  $P \vee \neg P$ .

Någon är sådan att om hen står upp så står alla upp.

## » Varför är $A \rightarrow B$ sann om $A$ är falsk?

För alla naturliga tal  $n$ : om  $n$  är delbart med 4 så är det jämnt.

- \*  $\forall n$  (“ $n$  delbart med 4”  $\rightarrow$  “ $n$  jämnt”)
- \* Sätt  $n = 3$ :
  - \* “3 delbart med 4”  $\rightarrow$  “3 jämnt”
  - \* falskt  $\rightarrow$  falskt
- \* Sätt  $n = 2$ :
  - \* “2 delbart med 4”  $\rightarrow$  “2 jämnt”
  - \* falskt  $\rightarrow$  sant

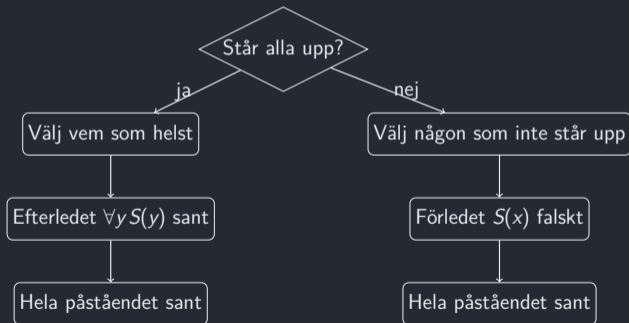
**Obs: Ej kausalitet eller relevans**

“Om ... så ...” har ej med orsak eller relevans att göra i logik.

## » Någon är sådan att om hen står upp så står alla upp.

Det finns person  $x$  sådan att ( om  $x$  står upp så står alla upp ).  
 $\exists x ( S(x) \rightarrow \forall y S(y) )$

$$\exists x ( S(x) \rightarrow \forall y S(y) )$$



## » Logisk sanning

- \* Någon är sådan att om hen står upp så står alla upp.

### Definition

En *logisk sanning* är ett påstående som är sant i alla tolkningar, dvs enbart på grund av sin logiska form.

- \* Någon är sådan att om hen dricker kaffe så dricker alla kaffe.
- \* Det finns en lampa i huset sådan att om den är tänd så är alla lampor tända.
- \* Det finns en bok i biblioteket sådan att om den är utlånad så är alla böcker utlånade.

### Om jag står upp så sitter jag inte ner.

- \* Om jag *dricker kaffe* så sitter jag inte ner.
- \* Om jag står upp så *pratar* jag inte.

## » Är det (logiskt) sant att $1 + 1 = 2$ ?

- \* Beror på hur vi tolkar symbolerna “1”, “+” och “2”.
- \* Sant i *standardtolkningen*.
- \* Om + istället tolkas som multiplikation: falskt.
- \* Det är alltså inte logiskt sant!

Vi måste anta vissa grundläggande egenskaper hos symbolerna: *axiom*.

## » Axiom och bevis

### Axiom

$$x + 0 = x$$

$$x + \text{succ}(y) = \text{succ}(x + y)$$

$$1 = \text{succ}(0)$$

$$2 = \text{succ}(1)$$

\*  $1+1=2$  är sant givet att axiomen är sanna.

### Bevis av $1 + 1 = 2$

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= \text{succ}(0) + \text{succ}(0) \\ &= \text{succ}(\text{succ}(0) + 0) \\ &= \text{succ}(\text{succ}(0)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Påståendet är sant *givet axiomen*. Det är en *logisk konsekvens* av axiomen.

## » Logisk konsekvens

### Definition

Ett påstående är en *logisk konsekvens* av givna premisser om det är sant i alla tolkningar där premisserna är sanna.

$$x + 0 = x, x + S(y) = S(x + y), 1 = S(0), 2 = S(1) \quad \vDash \quad 1 + 1 = 2$$

\* Logisk konsekvens är bevarande av sanning.

## » Sanning och paradoxer

### Lögnarparadoxen

“Den här satsen är falsk.”

- \* Om den är sann, så är den falsk.
- \* Om den är falsk, så är den sann.

» Om den här satsen är sann ska du studera logik.

- \* A: "Om den här satsen är sann ska du studera logik."
- \* B: "Du ska studera logik."
- \* A: "Om A är sann, så B"
- \* A kan inte vara falsk, eftersom då är A sann. Motsägelse!
- \* Alltså är A sann och därmed är B sann.

**Slutsats**

**Du ska studera logik!**

# TACK!

