Surreella tal: Ett spelteoretiskt verktyg

Fredrik Engström

2007–11–01
Mittuniversitetet

Spel och tal

Fredrik Engström

2007–11–01
Mittuniversitetet

Vad är ett spel?

- Två spelare: Vänster och Höger.
- Osymetriskt: Vid en given position kan Vänster och Höger ha olika möjliga “drag”.
- Alternerande “drag”.
- Spelaren som inte har några möjliga “drag” förlorar.
- Alla partier slutar med att någon vinner.
- Ingen slump.
- Ingen gömd information.

Exempel: Nim.
Nästan-exempel: Schack, Go.
Ickeexempel: Fia, kortspel.

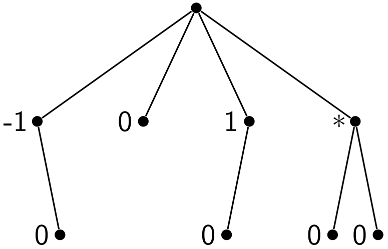
En definition av spel

- Ett spel G är ett par av mängder av spel.
- Notation: Om G består av mängderna $L = \{ l_1, l_2, \dots \}$ och $R = \{ r_1, r_2, \dots \}$ så skriver vi $G = \{ l_1, l_2, \dots \mid r_1, r_2, \dots \}$.
- G^L och G^R betecknar godtyckliga element i L respektive R.
- Vi skriver också $G = \{ G^L \mid G^R \}$.

Exempel:

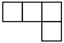
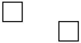
- Enklaste spelet är $0 = \{ \mid \}$
- Näst enklast är $1 = \{ 0 \mid \}$, $-1 = \{ \mid 0 \}$ och $* = \{ 0 \mid 0 \}$.
- $2 = \{ 1 \mid \}$, $3 = \{ 2 \mid \}$, $\dots$
- $\frac{1}{2} = \{ 0 \mid 1 \}$
- $\omega = \{ 0, 1, 2, \dots \mid \}$

Exempel



$$\Big\{ \{ \,|\, \{|\} \}, \{|\} \,\Big|\, \{ \{|\} \,|\, \}, \{ \{|\} \,|\, \{|\} \} \Big\} = \Big\{ \{ |0 \}, 0 \Big| \{ 0| \}, \{ 0|0 \} \Big\} = \{ -1, 0 \mid 1, * \}$$

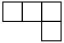
Domino

 $= \{$  $,$  $\mid$  $\}$

 $= 0$

 $= \{\, 0 \mid \,\} = 1$

 $= \{\, \mid 0 \,\} = -1$

 $= \{\, -1, 0 \mid 1 \,\} \equiv \frac{1}{2}$

Spel är determinerade

En spelare sägs ha en vinnande strategi i ett spel G om hon kan vinna spelet G oavsett hur den andra spelaren spelar.
Varje spel G uppfyller precis ett av följande:

- Vänster har en vinnande strategi, skrivs $G > 0$.
- Höger har en vinnande strategi, skrivs $G < 0$.
- Den andra spelaren har en vinnande strategi, skrivs $G \equiv 0$.
- Den första spelaren har en vinnande strategi, skrivs $G \parallel 0$.

Negation och addition

- Negationen av ett spel är det spel man får om Vänster spelar Högers val och tvärt om, dvs
$$-G = \left\{ -G^R \,\middle|\, -G^L \right\}$$
- Den (disjunktiva) summan av två spel G och H är det spel vi får om G och H spelas samtidigt på så vis att ett drag består av att spelaren väljer ett av spelen G eller H och spelar ett drag i det valda spelet, dvs
$$G + H = \left\{ G^L + H, G + H^L \,\middle|\, G^R + H, G + H^R \right\}.$$

Exempel

$1 + 1 = \{ 0 \mid \ \} + \{ 0 \mid \ \} = \{ 0 + 1, 1 + 0 \mid \ \} = \{ 1 \mid \ \} = 2.$
$-2 = -\{ 1 \mid \ \} = \{ \ \mid -1 \}.$

Att jämföra två spel

- $G < H$ om $G + (-H) < 0$, dvs Höger har en vinnande strategi i spelet där han spelar Höger i G och Vänster i H.
- Exempel: $* = \{\, 0 \mid 0 \,\} < \{\, 0 \mid \ \,\} = 1$, ty $\{\, 0 \mid 0 \,\} + \{\ \mid 0 \,\} = \{\, -1 \mid -1, * \,\}$.
- $G \equiv H$ om $G + (-H) \equiv 0$, dvs att den andra spelaren har en vinnande strategi i spelet $G + (-H)$.
- Exempel: $\{\, 0, 1 \mid \ \,\} \equiv \{\, 1 \mid \ \,\}$, ty $\{\, 0, 1 \mid \ \,\} + \{\ \mid 1 \,\} = \{\, -2, -1 \mid \{\, 1, 2, \{\, 0, 1 \mid \ \,\} \mid \ \,\} \,\} \equiv 0$

Vad är tal?

- Naturliga tal, $\mathbb{N}$: $0, 1, 2, \ldots$
- Hela tal, $\mathbb{Z}$: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
- Rationella tal, $\mathbb{Q}$: $\frac{57}{61}, \ldots$
- Reella tal, $\mathbb{R}$: $\pi, e, \ldots$.
- Oändliga ordinaltal: $\omega, \epsilon, \ldots$.
- Oändliga kardinaltal: $\aleph_0, \aleph_\omega, 2^{\aleph_0}$
- Infinitesimaler: $1/\omega$

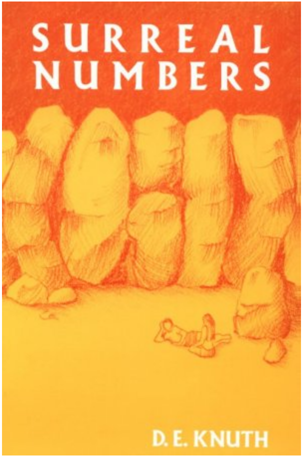
Tal är en klass av spel

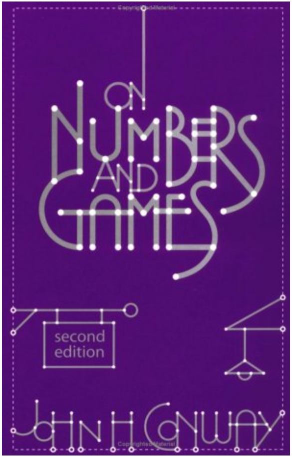
- Ett (surreellt-)tal är ett spel $G = \{ G^L \mid G^R \}$ sådant att alla G^L och G^R är tal och $G^L < G^R$.
- Om G är ett tal så är $G^L < G$ och $G < G^R$.
- Exempel: $0, 1 = \{ 0 \mid \}, 2 = \{ 1 \mid \}, \frac{1}{2} = \{ 0 \mid 1 \}$
- Ickeexempel: $* = \{ 0 \mid 0 \}$, $\{ 1 \mid 0 \}$.
- Alla naturliga tal är surreella tal: $n = \{ n - 1 \mid \}$.
- Alla heltal är surreella tal: $-n = \{ \mid -(n-1) \}$.
- Alla rationella tal är surreella.
- Alla reella tal är surreella (Dedekindsnitt).
- Alla ordinaltal är surreella: $\alpha = \{ < \alpha \mid \}$.
- Det finns infinitesimala surreella tal: $\{ 0 \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \}$.

Spel och tal

- Givet ett spel G som är ett tal så är talet ett mått på hur många dragts fördel Vänster har i spelet G.
- Givet ett spel G kan vi bilda $G - n$, där n är ett heltal, som är som G fast Vänster måste börja välja n gånger.
- Om vi vet för vilka tal x och y som $x < G$ och $G < y$ så vet vi en hel del om spelet G.
- Exempel: Om vi vet att $G < 2$ så vet vi att höger har en vinnande strategi i spelet där vänster börjar att dra två gånger i G.

Vidare...


SURREAL
NUMBERS
D. E. KNUTH


ON
NUMBERS
AND
GAMES
second
edition
JOHN H CONWAY